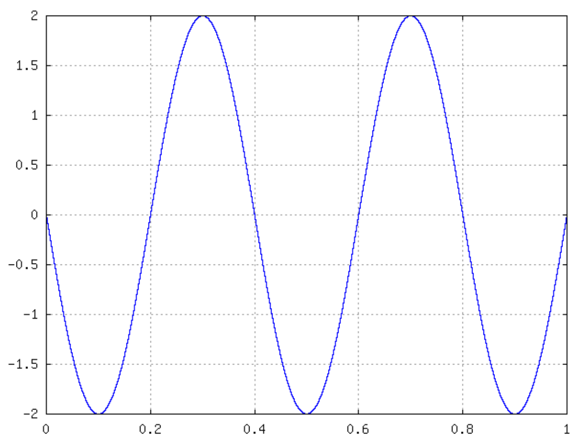
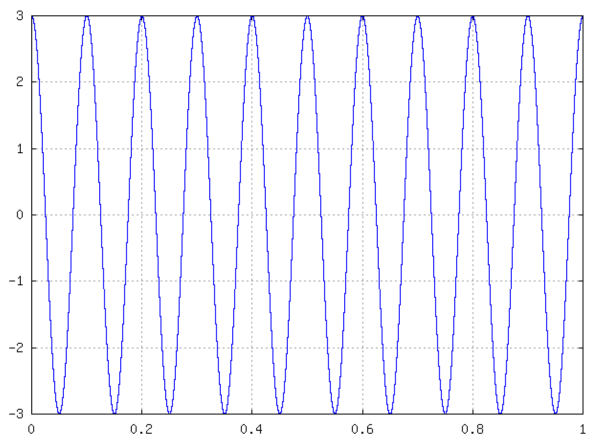
Tentamen Systemen & Signalen

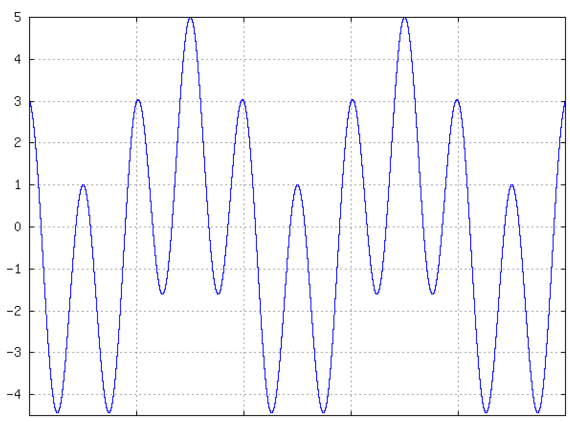
Woensdag 16 april 2008, 14:00-17:00 uur, Examenhal

- Lees eerst een opgave volledig door alvorens deze te maken. Schrijf netjes en zorgvuldig.
- Bij dit tentamen is een formuleblad beschikbaar. Als je gebruik maakt van een formule van dit blad, vermeld dan het nummer van de formule. Andere literatuur, zoals het boek, mag niet geraadpleegd worden. Het gebruik van een rekenmachine is toegestaan, mits dit geen grafische calculator is.
- Geef geen antwoorden zonder toelichting.
- Het tentamen bestaat uit 4 opgaven. Alle opgaven zijn evenveel punten waard.

Opgave 1: signalen en spectra
In de onderstaande figuren zijn 3 continue signalen (uitwijking als functie van de tijd) weergegeven.







(a) Geef voor ieder signaal een formule voor de amplitude als functie van de tijd.
(b) Gegeven zijn de continue signalen $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\cos(2\pi 500t) \\ y(t) &= \cos(2\pi 10t + \pi/4) \\ z(t) &= x(t)y(t) \end{aligned}$$

Schrijf ieder van deze signalen als een **som** van complexe e-machten.
(c) Teken van ieder signaal het spectrum. Geef waarden langs de assen en geef voor de frequentiecomponenten aan wat de fase is.
(d) Als we op twee (zuiver gestemde) piano's dezelfde toets aanslaan dan horen we een zuivere toon, ongeacht of we de toetsen wel of niet exact op het zelfde moment aanslaan. Waarom is dit zo?

Opgave 2: Systemen
Gegeven zijn de discrete signalen $x[n]$ en $y[n]$.

$$\begin{aligned} x[n] &= \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \\ y[n] &= \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4] \end{aligned}$$

Het signaal $x[n]$ plaatsen we op de invoer van een onbekend causaal systeem S_1. De uitvoer is het signaal dat gegeven wordt door $\delta[n] + 4\delta[n-1] + \delta[n-2]$.

(a) Wat betekent het dat S_1 een causaal systeem is?
(b) Is het systeem een LTI-systeem? Leg uit waarom wel/niet.

Een tweede systeem S_2 is een LTI-systeem waarvan de unit impulse respons wordt gegeven door

$$h_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2].$$

(c) Wat is de uitvoer van het systeem S_2 als we op de invoer de signalen $x[n]$ en $y[n]$ plaatsen?
(d) Laat $z[n]$ een onbekend signaal zijn. Als $z[n]$ op de invoer van S_2 wordt aangeboden, dan blijkt de uitvoer het signaal $\delta[n] + 3\delta[n-1] + 5\delta[n-2] + 8\delta[n-3] + 8\delta[n-4] + 3\delta[n-5]$ te zijn. Bepaal het invoer signaal $z[n]$.
(e) Wat is de frequentierespons $H_2(e^{j\hat{\omega}})$ van het systeem S_2?
(f) Geef een voorbeeld van een invoer voor S_2 die als uitvoer 0 (voor alle alle samples) oplevert. Uiteraard wordt hier niet gevraagd om de triviale input die overal 0 is.

Gegeven is een derde LTI system S_3. Dit systeem heeft als frequentierespons $H_3(e^{j\hat{\omega}}) = 1 - e^{-j\hat{\omega}}$. We bouwen nu een vierde systeem S_4 door de uitvoer van S_3 te koppelen aan de invoer van S_2.
(g) Bepaal de frequentierespons en de impulsrespons van het systeem S_4.

Opgave 3: Fourier analyse

Gegeven zijn 3 periodieke signalen $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$ waarvoor $x(t) = x(t+2)$, $y(t) = y(t+4)$ en $z(t) = z(t+2)$ voor alle t. Tevens is gegeven

$$x(t) = \begin{cases} t & \text{voor } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{voor } 1 \le t < 2 \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } 0 \le t < 1 \\ 2-t & \text{voor } 1 \le t < 2 \\ 0 & \text{voor } 2 \le t < 3 \\ 4-t & \text{voor } 3 \le t < 4 \end{cases} \quad z(t) = \begin{cases} 2t & \text{voor } 0 \le t < 1 \\ 4-2t & \text{voor } 1 \le t < 2 \end{cases}$$

(a) Bepaal van ieder signaal de periode (T_0). Schets ieder signaal voor $0 \le t \le 3T_0$.
(b) Bepaal de DC-component van de signalen $x(t)$ en $y(t)$.
(c) Laat zien dat de Fourier-coëfficienten (voor $k \neq 0$) van het signaal $x(t)$ gegeven worden door

$$a_k = \frac{(1 + j\pi k)(-1)^k - 1}{2\pi^2 k^2}.$$

Gegeven is nu dat de Fourier-coëfficienten (voor $k \neq 0$) van het signaal $y(t)$ zijn

$$a_k = \frac{(1 - j\pi k)(-1)^k - 1}{2\pi^2 k^2}.$$

(d) Bepaal de Fourier-coëfficienten (voor alle k) van het signaal $z(t)$.

Opgave 4: z-transformaties

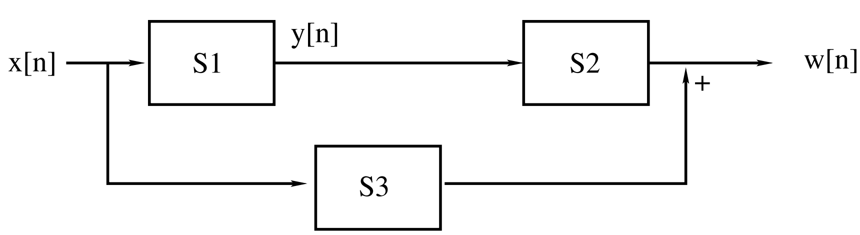
Een LTI-systeem wordt gegeven door de differentie-vergelijking

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

.

(a) Wat is de systeemfunctie van dit systeem?
(b) We bieden dit systeem de invoer $x[n] = 4 + \cos(\frac{n\pi - \pi}{4}) - 3\cos(\frac{2n\pi}{3})$ aan. Wat is de uitvoer?
(c) Bepaal de nulpunten van de systeemfunctie. Wat is het belang van deze nulpunten?
(d) Construeer de systeemfunctie van een FIR-filter dat de frequenties $\hat{w}_0 = \frac{\pi}{3}$ en $\hat{w}_0 = \frac{\pi}{4}$ volledig verwijderd (uiteraard wordt de triviale oplossing $H(z) = 0$ niet gevraagd). Wat is de differentie-vergelijking van dit systeem?

De onderstaande figuur toont de samenstelling van drie LTI systemen S_1, S_2 en S_3.



Het systeem S_1 wordt gegeven door de differentie-vergelijking $y[n] = x[n] - x[n-1]$. Het systeem S_2 wordt gegeven door de systeemfunctie $H(z) = (1 - z^{-1})(1 + z^{-2})$. Het systeem S_3 heeft de frequentierespons $H(e^{j\hat{\omega}}) = 2e^{-j3\hat{\omega}}$.

Maak de onderstaande vragen (e)-(g). Kies zelf een handige volgorde.

(e) Wat is de differentievergelijking voor het totale (samengestelde) systeem?
(f) Wat is de impulsrespons van het totale (samengestelde) systeem?
(g) Wat is de systeemfunctie van het totale (samengestelde) systeem?

Formuleblad Systemen en Signalen

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \sin(\theta + \pi/2) && (1)\\
\cos(\theta) &= \cos(\theta + 2\pi k) \text{ voor gehele } k && (2)\\
\cos(\theta) &= \cos(-\theta) && (3)\\
\sin(-\theta) &= -\sin(\theta) && (4)\\
\cos(2\pi k) &= 1 \text{ voor gehele } k && (5)\\
\cos(\pi k + \frac{\pi}{2}) &= 0 \text{ voor gehele } k && (6)\\
\cos(2\pi k + \pi) &= -1 \text{ voor gehele } k && (7)\\
j^2 &= -1 && (8)\\
Re(a + jb) &= a && (9)\\
Im(a + jb) &= b && (10)\\
(a + jb)^* &= a - jb && (11)\\
e^{j\theta} &= \cos(\theta) + j\sin(\theta) && (12)\\
\cos(\theta) &= \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} && (13)\\
\sin(\theta) &= \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} && (14)\\
\int e^{\alpha t} dt &= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} + c && (15)\\
\int t e^{\alpha t} dt &= \frac{\alpha t - 1}{\alpha^2} e^{\alpha t} + c && (16)\\
x[n] &= x(nT_s) \text{ Perfect A-to-D conversion} && (17)\\
f_s &= \frac{1}{T_s} \text{ Sampling frequency} && (18)\\
\hat{\omega} &= \omega T_s = \frac{\omega}{f_s} \text{ Normalized Radian Frequency} && (19)\\
y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] p(t - nT_s) \text{ Interpolation/Reconstruction} && (20)\\
p(t) &= \frac{\sin(\pi t / T_s)}{\pi t / T_s}, \quad -\infty < t < \infty \text{ Sinc pulse} && (21)\\
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt} \text{ Fourier synthesis} && (22)\\
a_k &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j(2\pi/T_0)kt}\, dt \text{ Fourier analysis} && (23)\\
X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \text{ DFT (Discrete Fourier Transform)} && (24)
\end{aligned}$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j(2\pi/N)kn} \text{ Inverse DFT} \tag{25}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \text{ FIR system} \tag{26}$$

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] \text{ Unit impulse response} \tag{27}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k] \text{ Convolution sum FIR-system} \tag{28}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \text{ General convolution} \tag{29}$$

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\hat{\omega}k} = \sum_{k=0}^{M} h[k]e^{-j\hat{\omega}k} \text{ Frequency response FIR-system} \tag{30}$$

$$h_1[n] * h_2[n] \leftrightarrow H_1(e^{j\hat{\omega}})H_2(e^{j\hat{\omega}}) \tag{31}$$

$$D_L(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sin(\hat{\omega}L/2)}{L\sin(\hat{\omega}/2)} \text{ Dirichlet function} \tag{32}$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N} x[k]z^{-k} \text{ Z-transform} \tag{33}$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{N} h[k]z^{-k} \text{ System function FIR system} \tag{34}$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z) \text{ Linearity of z-transform} \tag{35}$$

$$y[n] = h[n] * x[n] \leftrightarrow Y(z) = H(z)X(z) \text{ Convolution via z-domain} \tag{36}$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \tag{37}$$